# Definíciók – 2.zh.

**Medián:** Valamely ξ valószínűségi változó mediánja az a med (ξ) –vel jelölt valós szám, amelyre $P(\xi < \mathrm{med}(\xi)) \le \frac{1}{2}$ és $P(\xi \le \mathrm{med}(\xi)) \ge \frac{1}{2}$ ha ξ diszkrét; $P(\xi < \mathrm{med}(\xi)) = F(\mathrm{med}(\xi)) = \frac{1}{2}$, ha ξ folytonos.

**Módusz:** Ha a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei között van olyan, amelyet nagyobb valószínűséggel vesz fel, mint a többit, akkor ezt az értéket ξ móduszának nevezzük. Folytonos sűrűségfüggvény esetén ξ módusza a sűrűségfüggvény maximumhelye. A módusz jele: mod (ξ)

**q- kvantilis:** Legyen 0<q<1. Azt az $x_q$ számot, amely eleget tesz diszkrét eloszlás esetén a $P(\xi < x_q) \le q$ $P(\xi \le x_q) \ge q$ egyenlőtlenségeknek, folytonos eloszlás esetén az $F(x_q) = P(\xi < x_q) = q$ egyenletnek, a ξ valószínűségi változó q-kvantilisének nevezzük.

**Várható érték:** A ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei legyenek $x_1$, $x_2$ … akkor ξ várható értékének az $M(\xi) = \sum_i P(\xi = x_i) \cdot x_i = \sum_i p_i x_i$ összeget nevezzük, ha $\Sigma \mid x_i \mid p_i$ konvergens.

Ha ξ folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye f, akkor a ξ várható értéke $M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$

**Szórás:** Ha a ξ-M(ξ) valószínűségi változó négyzetének létezik a várható értéke, akkor ezt ξ *szórásnégyzetének* nevezzük: $D^2(\xi) = M\left([\xi - M(\xi)]^2\right)$

Ennek négyzetgyöke: $D(\xi) = \sqrt{M\left([\xi - M(\xi)]^2\right)}$ a ξ valószínűségi változó szórása.

---

**Karakterisztikus eloszlás:** A ζ valószínűségi változót karakterisztikus eloszlásúnak nevezzük, ha lehetséges értékei az 1és a 0, az ezekhez tartozó valószínűségek pedig: P(ζ=1)=p és P(ζ=0)=1-p=q, ahol 0≤p≤1. Ez nyílván eloszlás, mert $\Sigma p_i$=p+q=1.

**Binomiális eloszlás**: A ζ valószínűségi változót binomiális eloszlásúnak nevezzük, ha ζ lehetséges értékei 0,1,2…, n és $P(\zeta=k)= \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$ ahol, 0<p<1, q=1-p és k=0,1,2,…, n.

**Hipergeometriai eloszlás**: A ξ valószínűségi változót hipergeometriai eloszlásúnak nevezzük, ha $p_k = P(\xi = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{k}}$, k=0,1,2,…, n és az n, M, N pozitív egész számokra érvényes:

n ≤ M ≤ N és n ≤ N-M. A hipergeometriai eloszlást gyakorlatilag a visszatevés nélküli mintavétel leírására használjuk.

**Poisson-eloszlás:** A ξ valószínűségi változó Poisson-eloszlású**,** ha lehetséges értékei: 0,1,2… és: $p_k = P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ahol λ>0 rögzített és k є N.

**Geometriai eloszlás:** A ξ valószínűségi változót geometriai eloszlásúnak nevezzük, ha lehetséges értékei 1,2,3,…. és $p_k = P(\xi=k)=q^{k-1} \cdot p$, ahol 0<p<1, q=1-p és k=1,2,3,…

**Egyenletes eloszlás**: Akkor mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó az ]a;b[ intervallumban egyenletes eloszlású, ha sűrűségfüggvénye f: f(x)= { 1/b-a, ha a<x<b    és 0 máshol.

**Exponenciális eloszlás**: A ζ valószínűségi változót exponenciális eloszlásúnak nevezzük, ha sűrűségfüggvénye $f : f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , 0 \le x \end{cases}$ (x є R) ahol λ >0. A λ pozitív valós számot az $\lambda \in R^{+}$ eloszlás paraméterének nevezzük.

**Normális eloszlás:** Ha a η valvál. sűrűségfüggvénye φ , akkor azt mondjuk hogy η standard normális eloszlású.

Ha η standard normális eloszlású valvál, akkor belőle a ζ = ση + m (σ>0) lineáris transzformációval kapott ζ valvált normális eloszlásúnak nevezzük.

---

**Együttes eloszlás – Peremeloszlás:** $P_{ij}=P(\zeta=x_i ; \eta =y_j)$ (i=1.2…n) (j=1,2…m) valószínűségek a ζ és η valválok együttes eloszlását alkotják. A ζ és η eloszlását peremeloszlásnak nevezzük.

**Együttes eloszlásfüggvény - Perem-eloszlásfüggvény**: Legyenek ξ és η a W valószínűségi mező elemi eseményein értelmezett valószínűségi változók. A ξ és az η együttes eloszlásfüggvényének azt az F kétváltozós függvényt nevezzük, amely az (x,y) számpárhoz a ξ<x és η<y események együttes bekövetkezésének valószínűségét rendeli. F: F(x,y) = P (ξ<x; η<y) ((x,y) ∈ $R^2$). Ekkor külön a ξ valószínűségi változó $F_1$ eloszlásfüggvényét és az η valószínűségi változó $F_2$ eloszlásfüggvényét perem-eloszlásfüggvénynek nevezzük.

**Kovarancia**: Ha létezik a ξ és az η valószínűségi változók várható értéke, továbbá létezik $M([\xi - M(\xi)]\cdot[\eta - M(\eta)])$ várható értéke, akkor ezt a ξ és az η kovarianciájának nevezzük: $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = M([\xi - M(\xi)]\cdot[\eta - M(\eta)]) = M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)$.

**Korreláció**: Ha a ξ és η valószínűségi változóknak létezik a szórásuk, akkor az $R(\xi,\eta) = \frac{\mathrm{cov}(\xi,\eta)}{D(\xi)D(\eta)}$ számot a ξ és az η korrelációs együtthatójának nevezzük.

**Korrelálatlan:** Ha ξ és η korrelációs együtthatója létezik és R (ξ,η) = 0 akkor azt mondjuk, hogy a ξ és az η valószínűségi változók korrelálatlanok.

**Függetlenség:** A ξ és η valószínűségi változókat egymástól függetleneknek nevezzük, ha együttes eloszlásfüggvényük egyenlő a perem-eloszlásfüggvények szorzatával. Képletben: F (x,y) = $F_1$ (x) · $F_2$ (y) ((x,y) ∈ $R^2$)

**Feltételes valószínűségeloszlás:** Legyenek ξ és η diszkrét valválok $x_1$, $x_2$…, $x_n$ és $y_1$, $y_2$,…, $y_m$ lehetséges értékekkel. A $P(\xi=x_i \mid \eta=y_j) = P(\xi=x_i ; \eta=y_j) / P(\eta=y_j)$.

A ξ diszkrét valószínűségi változó η=*yj* **feltétel melletti várható értékén** az $M(\xi|\eta = y_k) = M(\xi|y_k) = \sum_i x_i \cdot P(\xi = x_i|\eta = y_k)$ összeget értjük.

**Regresszió függvény**: Az $m_2$: $m_2$ (y) = M (ξ|η=y) függvényt (y=$y_1$, $y_2$,…, $y_m$) a ξ valószínűségi változó η-ra vonatkozó (elsőfajú) regressziós függvényének**,** az $m_1$: $m_1$ (x) = M (η|ξ=x) (x=$x_1$, $x_2$, …, $x_n$) függvényt az η valószínűségi változó ξ-re vonatkozó **(**elsőfajú) regressziós függvényének nevezzük.

**Tételek – 2.zh.**

4.8.TÉTEL: Ha c tetszőleges valós szám, akkor M(c)=c. Ha M(ξ) létezik, akkor M(cξ) is létezik és M(cξ)=cM(ξ).

4.9. TÉTEL: Legyen n pozitív egész. Ha a ξ diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei $x_1$, $x_2$ … akkor $M(\xi^n)=\sum_i P(\xi=x_i)\cdot x_i^n=\sum_i p_i x_i^n$ (ha létezik).

Ha ξ folytonos f sűrűségfüggvénnyel, akkor $M(\xi^n)=\int_{-\infty}^{\infty} x^n\cdot f(x)dx$ (ha létezik)

Az $M(\xi^n)$ számot ξ ***n-edik momentumának*** nevezzük.

4.10. TÉTEL: Legyen $p_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+K+a_1 x+a_0$ tetszőleges n-edfokú polinom. Ha M(ζ ’’) létezik, akkor $M(P_n(\zeta))$ is létezik és,
$M(p_n(\xi))=a_n M(\xi^n)+a_{n-1}M(\xi^{n-1})+\ldots+a_1 M(\xi)+a_0$.

4.11. TÉTEL: Ha a ξ valószínűségi változó négyzetének létezik a várható értéke, akkor létezik a szórása is, és $D^2(\xi)=M(\xi^2)-M^2(\xi)$ (vagyis ξ második momentumából ki kell vonni az első momentum négyzetét).
4.12. TÉTEL: Ha a ξ valószínűségi változó szórása létezik, akkor tetszés szerinti a és b valós számok esetén η= aζ + b változónak is létezik a szórása és D(aζ + b) = |a| D(ζ).

---

9.1. TÉTEL: **Markov-egyenlőtlenség**: Legyen η olyan nemnegatív valószínűségi változó, amelynek létezik várható értéke (M(η)>0) és legyen t > 1 tetszőleges valós szám.
Ekkor $P(\eta\geq t\cdot M(\eta))\leq\frac{1}{t}$.

Az a = tM(η) jelölést bevezetve a tétel más, ezzel ekvivalens alakban is felírható: $P(\eta\geq a)\leq\frac{M(\eta)}{a}$.
9.2. TÉTEL: **Csebisev-egyenlőtlenség:** Legyen ξ olyan valószínűségi változó, amelynek létezik a szórása. Ha D(ζ) > 0, akkor tetszőleges t>1 esetén $P(|\xi-M(\xi)|\geq tD(\xi))\leq\frac{1}{t^2}$ $\quad D(\xi)>0$.
9.3. TÉTEL: **Bernoulli-tétel:** Tekintsünk egy kísérletet, ahol valamely A esemény bekövetkezésének valószínűsége p. Végezzük el a kísérletet n-szer egymástól függetlenül, és jelölje ebben a kísérletsorozatban $\xi_n$ az A esemény gyakoriságát. Ekkor tetszőleges ε>0 esetén igaz, hogy

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

illetve

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

---

7.1. TÉTEL: Ha ξ **karakterisztikus eloszlású** valószínűségi változó, akkor és P(ξ=1)=p, akkor M(ξ)=p és D(ξ)=√p·q.

7.2.TÉTEL: Ha a ξ valószínűségi változó **binomiális eloszlású**, akkor várható értéke M(ξ)=np, szórása D(ξ)=√ npq.

7.3.TÉTEL: Ha $\xi$ **hipergeometriai eloszlású**, akkor várható értéke $M(\xi)=n\cdot p$ (ahol $p= M/N$), szórésnégyzete $q=1-p$ jelöléssel $D^2(\xi)=npq(N-n)/N-1$.

7.4. TÉTEL: Ha N és M úgy tartanak a végtelenbe, hogy közben az $\frac{M}{N} = p$ hányados állandó marad, valamint n és k rögzített számok ($k \le n$), akkor $\lim\limits_{M,N\to\infty} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

7.5.+7.6. TÉTEL: A $\xi$ **Poisson-eloszlású** valószínűségi változó várható értéke és szórása $M(\xi) = \lambda$
$D(\xi) = \sqrt{\lambda}$

7.7. TÉTEL: Ha $n\to\infty$ esetén $p\to 0$ úgy, hogy közben az $n \cdot p$ sorozat állandó marad, $np=\lambda>0$, akkor $q=1-p$ jelöléssel lim $n\to \infty$(n alatt k)$p^k \cdot q^{n-k} = \lambda^k/k! \cdot e^{-\lambda}$.

7.8.TÉTEL: Ha a $\xi$ valószínűségi változó **geometriai eloszlású**, akkor várható értéke és szórása

$$M(\xi) = \frac{1}{p}$$

$$D(\xi) = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

7.9. TÉTEL: Ha a $\xi$ valószínűségi változó az ]a;b[ intervallumon **egyenletes eloszlású**, akkor várható értéke és szórása: $M(\xi)=a+b/2$, $D(\xi)=b-a/2\sqrt{3}$.

7.10. TÉTEL: Ha a $\xi$ valvál. **exponenciális eloszlású**, akkor várható értéke és szórása: $M(\xi)=D(\xi)=1/\lambda$.

---

8.1.TÉTEL: Ha $\eta$ **standard normális eloszlású**, akkor létezik a várható értéke és a szórása, értékük: $M(\eta)=0$, $d(\eta)=1$

8.2. TÉTEL: Ha a $\xi$ sűrűségfüggvénye $N(m;\sigma)$ eloszlású, akkor $M(\xi)=m$ és $D(\xi)=\sigma$.

8.3.TÉTEL: Ha a $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ független valválok és $M(\xi_i)=m$, $D(\xi_i)=\sigma$ $(i=1,2,3\dots n)$, akkor $\xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n/n$ várható értéke m és szórása $\sigma/\sqrt{n}$.

8.4. TÉTEL: **Centrális határeloszlás-tétel:** Ha $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$, azonos eloszlású független valválok, $M(\xi_i)=m$, $D(\xi_i)=\sigma$ $(i=1,2,3\dots n)$, akkor az $\eta_n= \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n-nm/\sigma\cdot\sqrt{n}$ valválok eloszlásfüggvénye olyan sorozatot alkotnak, amely minden $x \in R$ pontban standard normális eloszlás eloszlásfüggvényéhez tart: $\lim_{n\to\infty} P(\eta_n < x) = \Phi(x)$.

---

5.1.TÉTEL:

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = q_j \quad \sum_{j=1}^{m} p_{ij} = p_i$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$$

$(i=1,2,\dots n)$ és $(j=1,2\dots m)$.

5.2.TÉTEL: Ha F egy $(\xi,\eta)$ valószínűségi változók együttes eloszlásfüggvénye, valamint F1 a $\xi$ és F2 az $\eta$ perem-eloszlásfüggvénye, akkor az F

1. Mindkét változója szerint monoton növekedő.
2. Mindkét változója szerint balról folytonos.

3. $\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$

4. $\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} F(x,y) = 1$

5.3.TÉTEL: Ha $\xi$ és $\eta$ valválok várható értéke létezik, akkor létezik a $\xi+\eta$ várható értéke is, és $M(\xi+\eta) = M(\xi) + M(\eta)$.

5.4.TÉTEL: Ha $cov(\xi;\eta)$ létezik, akkor $cov(\xi;\eta)=M(\xi\eta)-M(\xi)M(\eta)$.

5.5.TÉTEL: Ha $\xi$ és $\eta$ szórása létezik, akkor létezik $\xi+\eta$ szórása is és $D^2(\xi+\eta) = D^2(\xi) + D^2(\eta) + 2\,cov(\xi,\eta)$.

5.6.TÉTEL: Ha $\xi$ és $\eta$ függetlenek, akkor tetszés szerinti $a<b$; $c<d$ számpárok esetén: $P(a\leq\xi<b;\ c\leq\eta<d) = P(a\leq\xi<b) \cdot P(c\leq\eta<d)$.

5.7.TÉTEL: A $\xi$ és $\eta$ diszkrét valószínűségi változók akkor és csak akkor függetlenek, ha minden lehetséges $(x_i, y_j)$ értékpárra $P(\xi=x_i;\ \eta=y_j) = P(\xi=x_i) \cdot P(\eta=y_j)$ Vagy a szokásos jelölésekkel: $p_{ij} = p_i \cdot q_j$ $(i=1\ldots n;\ j=1\ldots m)$.

5.8.TÉTEL: Ha a $\xi$ és az $\eta$ függetlenek, akkor $M(\xi\eta) = M(\xi) \cdot M(\eta)$ (amennyiben ezek a várható értékek léteznek).

---